Théorème de Pythagore : réciproque et contraposée

Je révise mon brevet pas à pas.

Mon Pass Maths

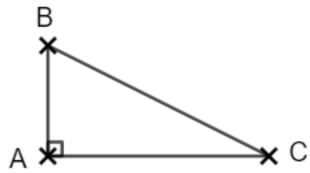
Correction

Prérequis : Calculer une longueur avec le théorème de Pythagore.

- Soit ABC un triangle rectangle en A. On a alors l'égalité de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Dans cette égalité, le terme seul est la longueur de l'hypoténuse.



Cette égalité sert donc **à calculer une longueur en connaissant les 2 autres**.

Vérifier si l'égalité de Pythagore est respectée.

Méthode pour tester l'égalité de Pythagore dans un triangle

Etape ① : Je commence par **déterminer** quel est le plus **grand côté** du triangle (si celui-ci est rectangle, ce côté sera l'hypoténuse).

Etape ② : Je mets cette longueur au **carré**.

Etape ③ : Je mets les 2 autres longueurs au carré puis je les **additionne**.

Etape ④ : **Je vérifie** s'il y a égalité entre les 2 termes des étapes 2 et 3.

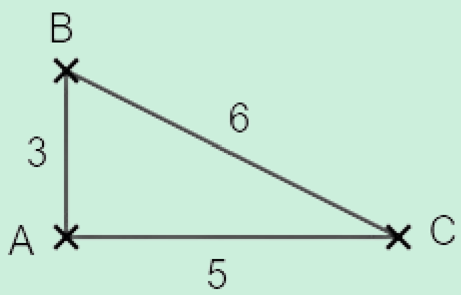
Exemple : On considère le triangle ABC ci-contre.

Le plus grand côté est [BC] car $6 > 5$ et $6 > 3$.

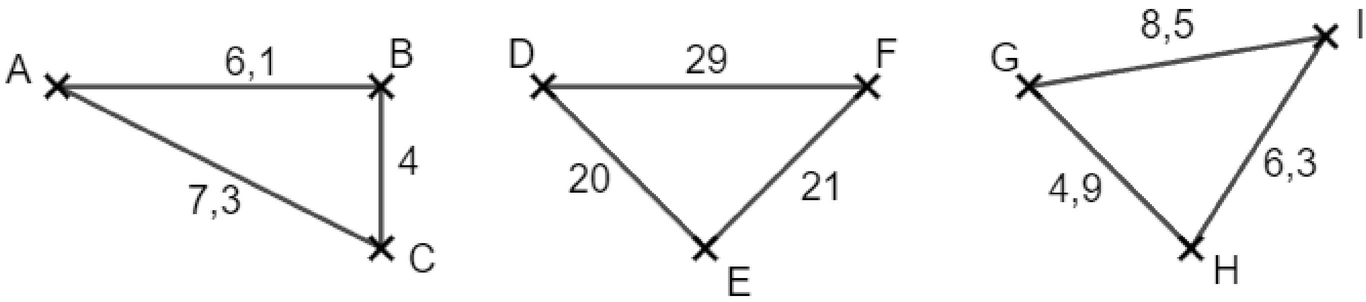
Je calcule d'une part : $BC^2 = 6^2 = 36$, et d'autre part :

$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.

On a ici $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$: l'égalité de Pythagore n'est pas respectée.



☑ **Voici 3 triangles (ils ne sont pas à l'échelle).**



Pour le(s)quel(s) l'égalité de Pythagore est-elle vérifiée ?

Triangle ABC : Le plus long côté est [AC].

Je calcule d'une part : $AC^2 = 7{,}3^2 = 53{,}29$

et d'autre part $AB^2 + BC^2 = 6{,}1^2 + 4^2 = 37{,}21 + 16 = 53{,}21$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée.

Triangle DEF : Le plus long côté est [DF].

Je calcule d'une part : $DF^2 = 29^2 = 841$

et d'autre part $DE^2 + EF^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.

L'égalité de Pythagore vérifiée.

Triangle ABC : Le plus long côté est [GI].

Je calcule d'une part : $GI^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25$

et d'autre part $GH^2 + HI^2 = 4{,}9^2 + 6{,}3^2 = 24{,}01 + 39{,}69 = 63{,}7$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée.

☑ **On construit un triangle BCD tel que BC = 4,8 ; CD = 5 et BD = 3,6.**

1. L'égalité de Pythagore est-elle vérifiée ?

Le plus long côté est [CD]. On a d'une part : $CD^2 = 5^2 = 25$ et d'autre part :

$BC^2 + BD^2 = 4{,}8^2 + 3{,}6^2 = 23{,}04 + 12{,}96 = 36$. L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée !

2. On conserve les longueurs BC et BD du triangle mais on augmente CD. Quelle doit alors être la longueur CD pour que l'égalité soit vérifiée ?

Dans ce triangle, le plus long côté sera encore CD (puisque cette longueur augmente).

On a déjà vu que $BC^2 + BD^2 = 36$.

On doit donc avoir $CD^2 = 36$, d'où $CD = \sqrt{36} = 6$.

En prenant CD = 6, l'égalité de Pythagore est vérifiée.

Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode pour justifier qu'un triangle est rectangle
à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore

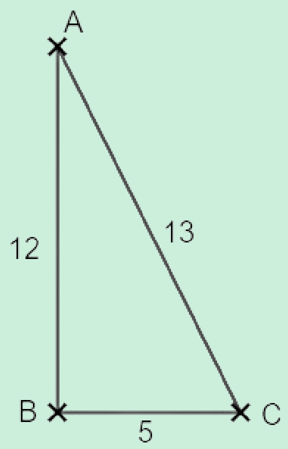
Etape ① : Je **détermine le plus long côté** du triangle.

Etape ② : Je mets sa longueur **carré**.

Etape ③ : Je **calcule** séparément la somme des carrés des 2 autres côtés.

Etape ④ : Si ces 2 termes sont **égaux**, l'égalité de Pythagore est vérifiée et je conclus à l'aide de la **réciproque du théorème de Pythagore que le triangle est rectangle** (je détermine en quel sommet à partir de l'égalité !).

Exemple : Voici un triangle ABC. On cherche à déterminer si celui-ci est rectangle et en quel sommet.



Le plus long côté est [AC].

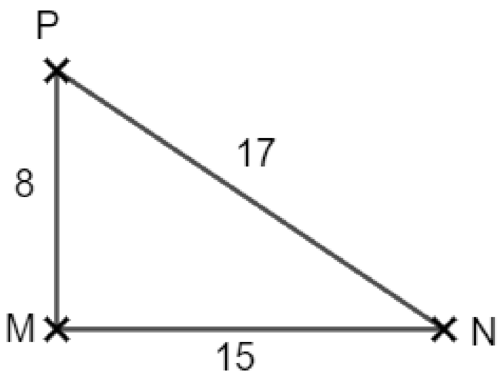
Je calcule d'une part : $AC^2 = 13^2 = 169$.

Je calcule d'autre part : $AB^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Voici un triangle MNP.



1. L'égalité de Pythagore est-elle vérifiée pour ce triangle ?

Le plus long côté est [PN].

Je calcule d'une part $PN^2 = 17^2 = 289$

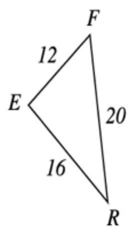
Et d'autre part : $MP^2 + MN^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$.

L'égalité est vérifiée, on a $PN^2 = MP^2 + MN^2$.

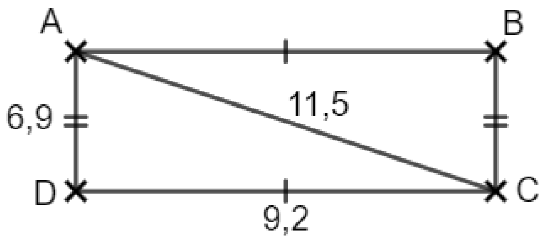
2. Déduis-en sa nature en justifiant.

D'après la question précédente et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en M et l'hypoténuse est [NP].

Pour chaque situation, choisis l’unique bonne réponse.

	EFR est rectangle en E	EFR n’est pas rectangle	EFR est rectangle en R
Soit ABC un triangle tel que AB = 3, BC = 4 et AC = 5.	(AB) ⊥ (AC)	(AB) ⊥ (BC)	(AC) ⊥ (BC)
Soit DEF un triangle rectangle en F.	$DE^2 \neq DF^2 + FE^2$	$FD^2 = FE^2 + ED^2$	$DE^2 = DF^2 + FE^2$

Voici un quadrilatère. Précise sa nature en justifiant.



On se place dans le triangle ACD dont le plus long côté est [AC].

On a $AC^2 = 11,5 = 132,25$ et $AD^2 + DC^2 = 6,9^2 + 9,2^2 = 47,61 + 84,64 = 132,25$.

D’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en D.

Le quadrilatère est donc un rectangle, car formé de 2 triangles rectangles (ABC est identique).

Capucine place des livres sur son étagère et souhaite vérifier qu’ils sont bien placés à la verticale. Pour cela, elle prend les mesures suivantes :

DC = 10,4 cm ; CE = 19,5 cm et DE = 22,1 cm.

Vérifie pour elle si ses livres sont bien positionnés !

On se place dans le triangle CED dont le plus grand côté est [DE].

On calcule d’une part : $DE^2 = 22,1^2 = 488,41$ et d’autre part :

$DC^2 + CE^2 = 10,4^2 + 19,5^2 = 108,16 + 380,25 = 488,41$.

D’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEC est rectangle en C.

Les livres de Capucine sont donc bien positionnées à la verticale sur l’étagère !

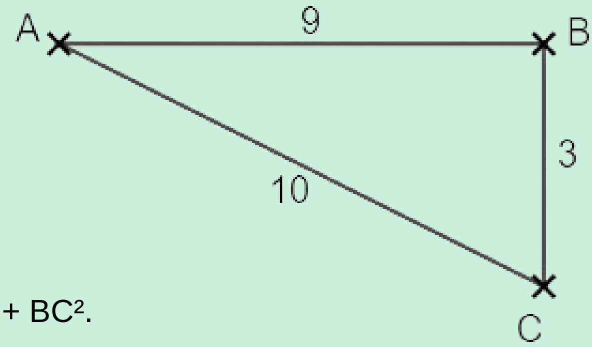
Utiliser la contraposée du théorème de Pythagore.

Méthode pour justifier qu'un triangle n'est pas rectangle à l'aide de la contraposée du théorème de Pythagore

Lorsque l'on détermine si l'égalité de Pythagore est vérifiée, il peut arriver que ce ne soit pas le cas !

Dans cette situation, on conclut que le triangle n'est **pas rectangle** à l'aide de la **contraposée** du théorème de **Pythagore**.

La démarche est donc la même (calcul des 2 termes de l'égalité de Pythagore), il suffit uniquement de vérifier si les 2 termes sont égaux, ou non, afin de choisir la **contraposée** (**non rectangle**) ou la **réciproque** (**rectangle**).



Exemple : Voici un triangle ABC. On cherche à déterminer si celui-ci est rectangle.

Le plus long côté est [AC].

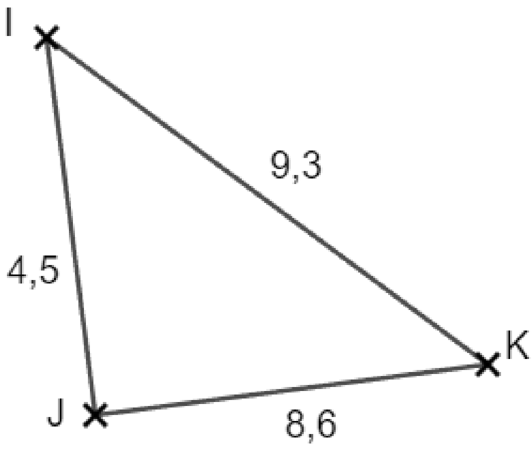
Je calcule d'une part : $AC^2 = 10^2 = 100$.

Et d'autre part : $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée : $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$.

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Voici un triangle IJK. Celui-ci est-il rectangle ? Justifie la réponse.



Dans ce triangle, le plus long côté est [IK].

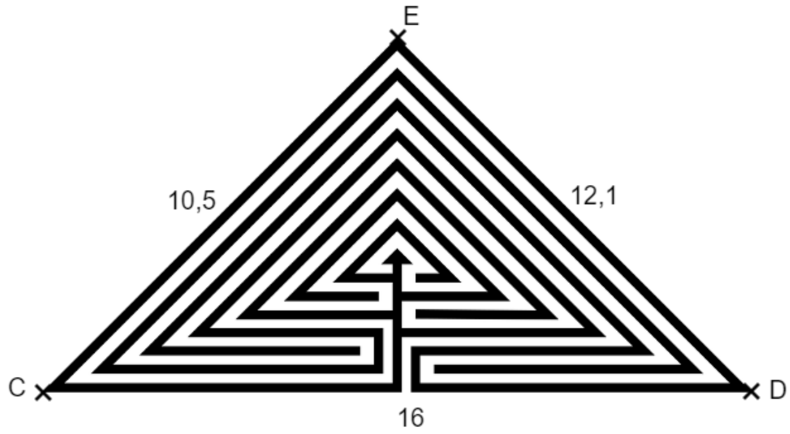
Je calcule d'une part : $IK^2 = 9{,}3^2 = 86{,}49$

Et d'autre part : $IJ^2 + JK^2 = 4{,}5^2 + 8{,}6^2 = 20{,}25 + 73{,}96 = 94{,}21$.

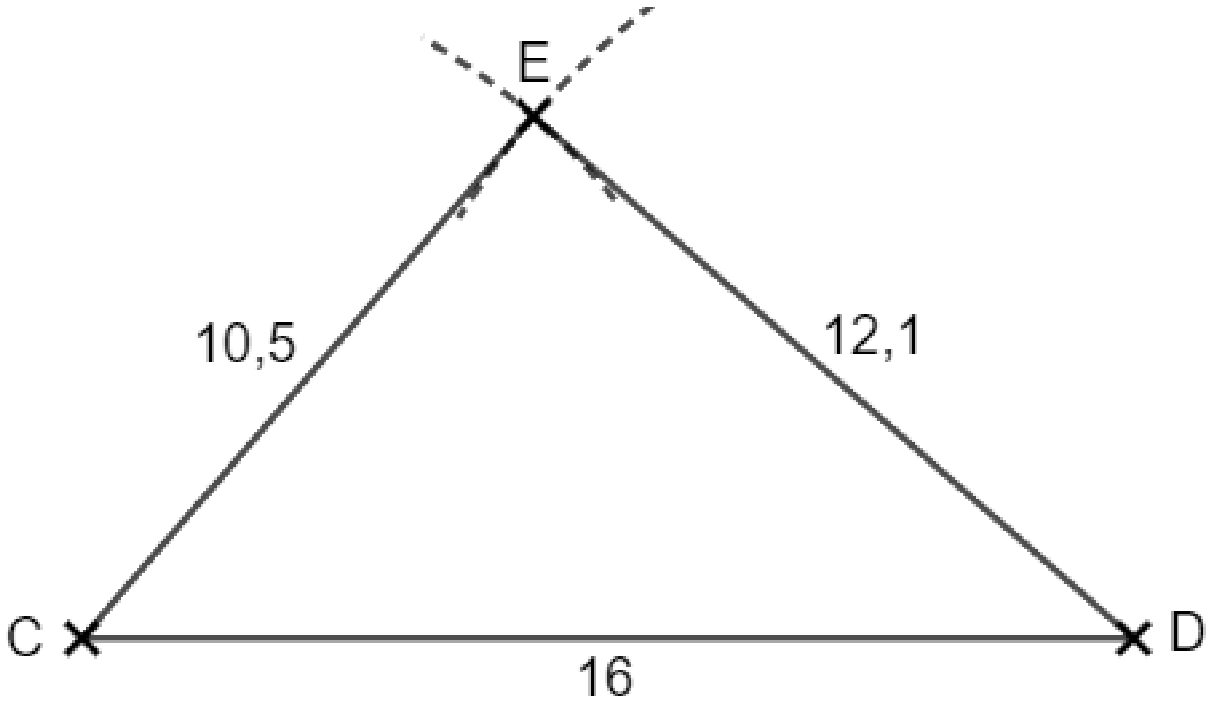
On a $IK^2 \neq IJ^2 + JK^2$.

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle IJK n'est pas rectangle.

Farid, architecte, doit imaginer un labyrinthe qui sera construit pour les visiteurs dans les jardins d'un château. Celui-ci sera placé dans un angle et doit avoir pour forme un triangle rectangle. Il réalise le croquis ci-contre, qui sera ensuite réalisé en vraies grandeurs.



1. Trace, en prenant comme unité le centimètre, le triangle CDE du croquis de Farid.



2. Visuellement, le triangle semble-t-il rectangle ?

Le triangle semble être rectangle !

3. Vérifie par le calcul si le labyrinthe est conforme.

Le côté le plus long est [CD].

On a d'une part $CD^2 = 16^2 = 256$

et d'autre part $CE^2 + ED^2 = 10,5^2 + 12,1^2 = 110,25 + 146,41 = 256,66$.

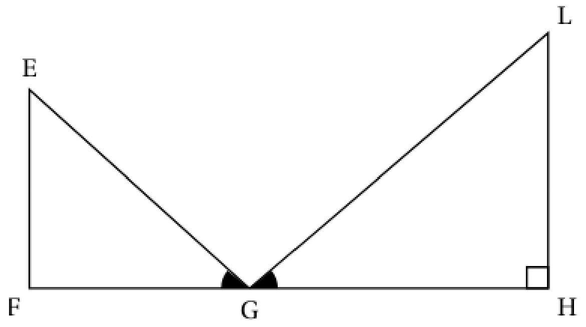
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle.

Le labyrinthe pourrait être considéré comme non conforme (cependant, l'erreur est minime !).

Questions de brevet.

1. On considère la figure ci-contre dans laquelle :

- Les points F, G et H sont alignés
- (LH) est perpendiculaire à (FH)
- EF = 18 cm ; FG = 24 cm ; EG = 30 cm ;
  GH = 38,4 cm
- $\widehat{EGF} = \widehat{LGH}$



La figure n'est pas en vraie grandeur.

Montrer que le triangle EFG est rectangle en F.

Dans le triangle EFG, le plus grand côté est EG = 30 cm.

D'une part : $EG^2 = 30^2 = 900$

D'autre part : $EF^2 + FG^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$

On constate que $EG^2 = EF^2 + FG^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFG est rectangle en F.

Pour aller plus loin.

Sur le site de Pass Education, tu trouveras **d’autres ressources** pour réviser cette notion :

Séquence complète	Réciproque et contraposée Pythagore
Exercices type Brevet	Brevet 2